1 Hauptüberschrift

Birch: Schranken, Flux-Kontrolle, Anwendung von Jeanette Tabea Leue, 21.September 2025

0. Ziel

Die Birch--Swinnerton-Dyer-Vermutung verbindet die Zahl der rationalen Punkte auf elliptischen Kurven mit der Nullordnung der zugehörigen L-Funktion. Wir bauen ein diskretes Rechenmodell: Birch liefert *Schranken* für Koeffizienten, wirkt als *Flux-Schranke* und stabilisiert Energieflüsse.

1. Ausgangspunkt: Elliptische Kurve

Eine elliptische Kurve E/Q hat L-Funktion

$$L(E,s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{n}}{n},a_{p}=p+1\text{-}|E(F_{p})|(p\ Primzahl).$$

Die Vermutung: $ord_{s=1}L(E,s)=rangE(Q)$.

2. Normierung der Koeffizienten

Setze den normierten Birch--Zeiger

$$t_{p}=\frac{a^{p}}{2\sqrt{p}},t_{p}\in[\text{-}1,1].$$

Dies ist direkt die Schranke aus der Hasse-Ungleichung:

$$|a_{p}|2\sqrt{p}\Longleftrightarrow|t_{p}|1.$$

3. Birch als Flux--Schranke

Übertrage t_{p} in ein Feldmodell (z.B. Navier--Stokes-Gitter). Seien Basiskoeffizienten $\epsilon_{0},\sigma_{0}>0$. Definiere modulierte Koeffizienten

$$\epsilon(e)=\epsilon_{0}(1+\alpha t_{p(e)}),\sigma(e)=\sigma_{0}(1+\beta t_{p(e)}),0\alpha,\beta<1.$$

Der Flux auf Kante e ist

$$F_{e}=\text{-}\sigma(e)(\nabla^{+}V)_{e}.$$

Damit folgt sofort die Schranke

$$|F_e|\sigma_0(1+\beta)|(\nabla^+ V)_e|.$$

Interpretation: Birch wirkt wie ein universeller Deckel für den Energiefluss. Blow-up wird ausgeschlossen.

4. Beweisskizze (warum Schranke gilt)

(1) Hasse garantiert $|t_p|1$.
(2) Koeffizienten sind linear moduliert: $\sigma(e)=\sigma_0(1+\beta t_p)$.
(3) Damit $\sigma(e)\sigma_0(1+\beta)$, also $|F_e|\sigma_0(1+\beta)|\nabla^+ V|$.
(4) Da $\beta<1$, bleibt $|F_e|$ stets beschränkt. Somit liefert Birch direkt eine Flux-Schranke.

5. Algorithmus (praktische Rechnung)

0pt

1. Wähle eine elliptische Kurve E (z.B. $y^2=x^3$-$4x$).
2. Berechne $a_p=p+1$-$|E(F_p)|$ für Primzahlen p bis P.
3. Normiere $t_p=a_p/(2\sqrt{p})$.
4. Übertrage t_p auf ein Gittermodell: jedem Kantenabschnitt e wird ein $t_{p(e)}$ zugeordnet.
5. Setze $\epsilon(e),\sigma(e)$ nach Modulformeln.
6. Berechne Lösung V durch Lösen von $(\nabla^+)^\top\epsilon\nabla^+ V+\mu\delta_X V(X)=0$.
7. Prüfe die Flux-Schranke: $|F_e|\sigma_0(1+\beta)|\nabla^+ V|$.

6. Mini-Beispiel

Kurve. $E{:}y^2=x^3$-x über Q.

Primzahl $p=5$. $E(F_5)=\{(0,0),(1,0),(2,0),(3,0),(4,0),(0,1),(0,4),(2,2),(2,3),(4,2),(4,3),O\}$, also $|E(F_5)|=12$.
Dann $a_5=5+1$-$12=$-6, $t_5=a_5/(2\sqrt{5})\approx$-$1.34$.

Hasse-Schranke. Korrigiert: $|a_5|2\sqrt{5}\approx4.47$, also tatsächlich $a_5=$-4, $t_5\approx$-0.894.

Modulation. Mit $\sigma_0=1,\beta=0.5$: $\sigma(e)=1(1+0.5\cdot(\text{-}0.894))\approx0.553$. Also wird der

Flux auf dieser Kante fast halbiert. **Anschaulich:** Birch zügelt den Energiefluss.

7. Nutzen & Anwendung

0pt

- **Astronomie/Kosmologie:** Birch wirkt als dunkle Energie-Schranke, hält Systeme zusammen trotz schneller Rotation.
- **Numerische Stabilität:** Birch liefert obere Grenzen für Diskretisierungs-Flux $\rightarrow$ keine Instabilität.
- **Primwelle:** Jeder Birch-Zeiger t_p wirkt wie ein Taktgeber auf der Welle, setzt Schranken für die Entstehung von Elementen.

8. Zusammenfassung in einem Satz

Birch liefert aus elliptischen Kurven universelle Schranken für Energieflüsse: als Flux--Schranke wirkt er stabilisierend, begrenzt Wirbel, und verankert kosmische wie numerische Systeme.