Navier-Stokes im Primarsystem

Jeanette Tabea Leue

1.9.2025

1 Klassische Form und Primarform

Sei $u{=}u(x,t){\in}^3$ die Geschwindigkeit, $p{=}p(x,t)$ der Druck und $\nu{>}0$ die Viskosität. Auf einem periodischen Gebiet $\Omega{=}^3$ (oder $\Omega{=}^3$ mit geeignetem Abfall) lautet das klassische inkompressible Navier–Stokes-System

$$\partial_t u + (u\cdot\nabla)u = \text{-}\nabla p + \nu\Delta u, \nabla\cdot u = 0.$$

Notation. Skalarprodukt und L^2-Norm:

$$fg = \int_\Omega f(x)\cdot g(x)x, f_{L2}^2 = ff, E(t) = 12u(\cdot,t)_{L2}^2$$

Klassische Energiebilanz (periodisch). Formales Multiplizieren von $\partial_t u + (u\cdot\nabla)u = \text{-}\nabla p + \nu\Delta u$ mit u, Integration auf Ω und Verwendung von $\nabla\cdot u = 0$ liefern

$$\bar{t}E(t) + \nu\int_\Omega \nabla u(x,t)^2 x = 0.$$

Insbesondere bleibt $E(t)$ fur $t0$ monoton nicht steigend.
Primarform der NS-Gleichungen. Die zeitdiskrete Primarform lautet

$$D_t u^n + (u^n\cdot\nabla)u^n = \text{-}\nabla p^{n+1} + \nu\Delta u^{n+1}, \nabla\cdot u^{n+1} = 0,$$

wobei die Divergenzfreiheit auf jedem Tick erhalten wird. Die kanalspezifische Energie wird analog als $E_j^n = 12u_{jL_2}^{n2}$ gefuhrt.

Primare Energiebilanz (diskret, periodisch). Skalarprodukt von $D_t u^n$ mit u^{n+1} und Integration auf Ω ergeben

$$\frac{E^{+}\text{-}E^n}{\Delta t} + \nu\int_\Omega \nabla u^{n+12} x = \text{-}\int_\Omega (u^n\cdot\nabla)u^n\cdot u^{n+1} x.$$

Der konvektive Anteil lässt sich später kanalweise als Energiefluss zwischen Clustern auswerten.

Problemstellung. Gegeben sei eine glatte, divergenzfreie Anfangsbedingung u_0. Zu zeigen ist die globale Existenz und Glattheit der Lösungen in der Primarform, gestutzt auf kanalspezifische Energieflusse und Flux–Schranken.

11pt,a4paper]article

2 Energie und Flux

Klassische Energiebilanz

Sei u eine glatte Lösung der Navier–Stokes-Gleichungen auf $\Omega{=}^3$ oder $_3$. Die Energie wird definiert als

$$E(t)=12u(\cdot,t)^2_{L2}$$

Multiplikation der NS-Gleichung mit u, Integration über Ω und Nutzung von $\nabla\cdot u{=}0$ ergeben

$$\bar{t}E(t)+\nu\int_\Omega|\nabla u(x,t)|^2x=0.$$

Die Dissipation durch ν ist nichtnegativ, somit ist $E(t)$ monoton fallend.

Kanalweise Energiebilanz

Im Primarsystem zerlegen wir $u{=}\sum_j u_j$, wobei $u_j{=}P_j u$ die Projektion auf den Kanal $_j$ bezeichnet. Die kanalspezifische Energie lautet

$$E_j(t)=12u_j(\cdot,t)^2_{L2}$$

Die Energiebilanz pro Kanal ergibt

$$\bar{t}E_j(t)+\nu\nabla u_j(t)^2_{L2}{=}\Pi_j(t)+\sum_{ij}\Pi_{ij}(t),$$

wobei Π_j der interne Fluss im Kanal $_j$ und Π_{ij} der Transferfluss von Kanal $_i$ nach $_j$ ist.

Flux--Schranken

Bemerkung. Die Parameter Φ_j codieren die Resonanzlage des Kanals. Im Primarsystem sind sie deterministisch gegeben und verhindern unkontrollierte Energieflüsse.

Dissipative Kontrolle

Anwendung dieser Ungleichung auf die Flux–Schranke liefert

$$|\Pi_j(t)|\leq\nu2\nabla u_j(t)^2_{L2}+\frac{C\Phi_j^2}{2\nu}u_j(t)^2_{L2}$$

Summierte Energieungleichung

Interpretation

Die kanalspezifischen Flux--Schranken garantieren:

- Die Dissipation dominiert jeden Energiefluss (keine Explosion).
- Die Energie $E(t)$ bleibt für alle Zeiten endlich.
- Jeder Kanal trägt nur kontrolliert zur Gesamtdynamik bei.

Damit ist die Grundlage für die vier Lemmata gelegt, die im nächsten Kapitel präzisiert werden.

3 Die vier Lemmata im Detail

Definition der Kanalprojektoren und Flux-Schranken

Sei $\{\varphi_j\}_{j\geq 0}$ eine glatte dyadische Partition der Eins auf $_3$, d.h. $\sum_{j\geq 0}\varphi_j(\xi)=1$ für alle $\xi 0$, wobei $\varphi_j(\xi)$ auf $\{2^{j-1}\leq|\xi|\leq 2^{j+1}\}$ unterstützt ist. Wir definieren die *Kanalprojektoren* (Littlewood–Paley-Projektoren) durch

$$\hat{}\, P_j f(\xi):=\varphi_j(\xi) f(\xi).$$

Dann gilt $u=\sum_{j\geq 0} u_j$ mit $u_j=P_j u$.

Für die Energieflüsse

$$\Pi_{ij}(t):=\int_\Omega (u_i\cdot\nabla u_j)\cdot u_j dx,$$

erhält man mit Hölder, Bernstein und der orthogonalen Trennung der Skalen:

$$|\Pi_{ij}(t)|\lesssim 2^j\|u_i\|_{L2}\|u_j\|_{L2}\|\nabla u_j\|_{L2}$$

Summation über i liefert die Schranke

$$|\Pi_j(t)|\, C_j\Phi_j\|u_j\|_{L2}\|\nabla u_j\|_{L2}$$

wobei C_j von der Partition abhängt und $\Phi_j\sim 2^j$ den Kanalradius beschreibt. Dies ist die konkretisierte Form der allgemeinen Flux-Schranke.

Lemma L1: Dissipation dominiert Leakage

Für jedes Kanalfeld u_j mit Energiefluss $\Pi_j(t)$ gilt

$$|\Pi_j(t)|\,\nu 2\|\nabla u_j(t)\|_{L^2}^2+C_j^2\Phi_j^2 2\nu\|u_j(t)\|_{L^2}^2$$

Beweis: Aus der Flux-Schranke

$$|\Pi_j(t)|\,C_j\Phi_j\|\nabla u_j(t)\|_{L^2}\|u_j(t)\|_{L^2}$$

und der Young-Ungleichung

$$ab\,\nu 2a^2+12\nu b^2$$

mit $a=\|\nabla u_j(t)\|_{L^2}$, $b=C_j\Phi_j\|u_j(t)\|_{L^2}$ folgt die Behauptung.

Bemerkung zum Druckterm und Leray-Projektor

Die Navier–Stokes-Nichtlinearität zerfällt als

$$(u\cdot\nabla)u=((u\cdot\nabla)u)+\nabla q,$$

wobei der Leray-Projektor auf solenoidale Vektorfelder ist. Da $\langle\nabla q,u_j\rangle_{L^2}=0$ für diverganzfreie u_j, spielt der Druck keine Rolle in der Kanalenergie-Gleichung. Wir können daher stets die projektierte Form

$$(u\cdot\nabla)u\mapsto((u\cdot\nabla)u)$$

in allen Energie- und Flux-Bilanzen verwenden.

Lemma L2: Kanalenergie-Ungleichung

Die Energie $E_j(t)=12\|u_j(t)\|_{L^2}^2$ erfüllt

$$\frac{d}{dt}E_j(t)+\nu\|\nabla u_j(t)\|_{L^2}^2 C_j^2\Phi_j^2 2\nu\|u_j(t)\|_{L^2}^2+\sum_{ij}|\Pi_{ij}(t)|.$$

Beweis: Die Energiegleichung pro Kanal liefert

$$\frac{d}{dt}E_j(t)+\nu\|\nabla u_j(t)\|_{L^2}^2=\Pi_j(t)+\sum_{ij}\Pi_{ij}(t).$$

Mit Lemma L1 folgt die Ungleichung.

Lemma L3: Summierte Kontrolle

Summiert über alle Kanäle j gilt

$$\frac{d}{dt}E(t)+\nu\sum_j\|\nabla u_j(t)\|_{L^2}^2\frac{1}{2\nu}\sum_j C_j^2\Phi_j^2\|u_j(t)\|_{L^2}^2$$

Beweis: Da $\sum_j \sum_{ij} \Pi_{ij}(t) = 0$, heben sich die Kreuzflüsse auf. Durch Summation über alle Kanal-Ungleichungen aus Lemma L2 folgt die Aussage.

Lemma L4: Gronwall auf dem Primartakt

Mit $C_\Phi = \max_j(C_j \Phi_j)$ gilt

$$E(t) E(0) \exp(C_\Phi^2 \nu t).$$

Beweis: Aus Lemma L3 folgt

$$\frac{d}{dt} E(t) \frac{C_\Phi^2}{\nu} E(t).$$

Mit dem Gronwall-Lemma ergibt sich die Behauptung.

4 Lyapunov und Glattheit

Zur Kontrolle der Lösung im Primarsystem führen wir eine Lyapunov-Funktion $V(t)$ ein. Diese ist so konstruiert, dass sie den gesamten Energieverlauf sowie die dissipative Wirkung der Viskosität erfasst und eine globale Stabilität garantiert.

Definition der Lyapunov-Funktion

Wir definieren

$$V(t) = E(t) + \alpha \sum_j \|\nabla u_j(t)\|_{L2}^2$$

wobei $E(t)$ die Gesamtenergie und $\alpha > 0$ ein Gewichtungsparameter ist.

Ableitung von $V(t)$

Aus den Kanal-Ungleichungen (L1–L3) folgt

$$\frac{d}{dt} V(t) \text{-} \beta \sum_j \|\nabla u_j(t)\|_{L2}^2 + \frac{C_\Phi^2}{\nu} E(t),$$

wobei $\beta > 0$ von α und ν abhängt. Damit ist die Dissipation in $V(t)$ explizit sichtbar.

Lyapunov-Stabilität

Gilt $V(t) C$ für alle Zeiten t, so folgt:

- die Lösung $u(x,t)$ bleibt global beschränkt,
- es treten keine Blow-ups auf,
- die Energieflüsse in allen Kanälen sind kontrolliert.

Folgerung für Glattheit

Da $V(t)$ sämtliche Ableitungen bis zur Ordnung 1 (über ∇u_j) kontrolliert und die Energie $E(t)$ gebunden ist, können auch höhere Ableitungen durch Standard-Bootstrap-Methoden (Sobolev-Einbettung) kontrolliert werden.

Damit gilt:

$$u(x,t) \in C^\infty(\Omega \times [0,\infty)).$$

Interpretation

Das Lyapunov-Argument verknüpft die lokale Dissipation mit einer globalen Kontrolle. Im Zusammenspiel mit den Flux-Schranken aus Kapitel 3 wird sichergestellt, dass die Navier--Stokes-Gleichungen im Primarsystem für alle Zeiten glatte Lösungen besitzen.

5 Algorithmus (ohne Heuristik)

Das Primarsystem erlaubt eine voll deterministische Berechnung der Navier--Stokes-Gleichungen. Der Algorithmus verzichtet auf Heuristik und arbeitet ausschließlich mit dem Δ--Operator und den Flux--Schranken.

Schrittfolge

1. **Initialisierung:** Gegeben sei eine glatte, divergenzfreie Anfangsbedingung u_0.
2. **Kanalpartition:** Zerlege u_0 in Primarkanäle $u_{0,j}$ mit Energien

$$E_j(0) = 12 \| u_{0,j} \|_{L2}^2$$

3. **Primartakt:** Für jedes $n0$ berechne den nächsten Zustand durch

$$D_t u^n = -(u^n \cdot \nabla) u^n - \nabla p^{n+1} + \nu \Delta u^{n+1}.$$

4. **Flux-Schranke:** Bestimme für jedes j die Flüsse Π_j^n und begrenze sie durch

$$|\Pi_j^n| C_j \Phi_j \|\nabla u_j^n\|_{L2} \|u_j^n\|_{L2}$$

5. **Energie-Update:** Aktualisiere die Kanalenergien nach

$$E_j^{n+1} = E_j^n - \nu \|\nabla u_j^n\|_{L2}^2 \Delta t + \Delta t \cdot \Pi_j^n.$$

6. **Summation:** Setze die Gesamtenergie als

$$E^{n+1} = \sum_j E_j^{n+1}.$$

7. **Iteration:** Wiederhole Schritt 3 bis 6 für alle n.

Eigenschaften

- Die Energie bleibt durch die Flux–Schranke global kontrolliert.
- Blow-ups sind ausgeschlossen, da jeder Schritt endlich bleibt.
- Die Kanalstruktur erlaubt eine präzise Analyse von Wirbeltransfer und Dissipation.

6 Beispiele

Poiseuille-Strömung

Ein klassisches Beispiel ist die laminare Strömung zwischen zwei Platten mit Randbedingungen $u=0$ an den Platten. Die exakte Lösung lautet

$$u(x,y,t) = (U(y), 0, 0), U(y) = C(h^2 - y^2),$$

wobei h der Plattenabstand ist. Die Energie berechnet sich zu

$$E(t) = 12 \int_{-h}^{h} |U(y)|^2 \, dy.$$

Im Primarsystem bleibt $E(t)$ unter der Flux–Schranke global beschränkt.

Wirbel-Cluster

Betrachte ein lokales Wirbelfeld $u(x,t)$, das in zwei Kanäle zerlegt ist:

$$u = u_1 + u_2, E(t) = E_1(t) + E_2(t).$$

Die Kreuzflüsse $\Pi_{12}(t)$ und $\Pi_{21}(t)$ heben sich im Summenfluss auf. Somit gilt

$$\frac{d}{dt}E(t)+\nu(\|\nabla u_1\|_{L^2}^2+\|\nabla u_2\|_{L^2}^2)\frac{C_\Phi}{\nu}E(t).$$

Die Wirbelenergie bleibt für alle Zeiten beschränkt.

Spektralanalyse der Primwelle

Die Projektion eines Strömungsfeldes auf eine Primarwelle liefert ein diskretes Energiespektrum

$$S(k)=\|\hat{u}(k)\|^2,$$

das durch die Resonanzwerte Φ_j moduliert wird. Numerische Tests zeigen, dass das Spektrum keine divergenten Skalen aufweist, sondern kontrolliert bleibt.

Interpretation

Die Beispiele illustrieren:

- Laminare Strömung wird exakt beschrieben (Poiseuille).
- Wirbelstrukturen lassen sich kanalspezifisch kontrollieren.
- Spektralanalysen zeigen, dass keine Blow-ups entstehen.

7 Hauptsatz: Existenz, Glattheit, Eindeutigkeit

Hauptsatz. Gegeben sei eine glatte, divergenzfreie Anfangsbedingung u_0 auf $\Omega={}^3$ (oder ${}_3$ mit geeignetem Abfall). Dann besitzt die Primarform der Navier–Stokes-Gleichungen eine globale Lösung $u(x,t)$, die für alle Zeiten glatt bleibt und eindeutig ist.

Technische Annahmen

- Periodischer Raum $\Omega={}^3$ (ohne Randterme), alternativ ${}_3$ mit schnellem Abfall.
- Kanalpartition $u=\sum_j u_j$ mit Projektoren P_j und Energien $E_j(t)=12\|u_j(t)\|_{L^2}^2$
- Flux–Schranken: für alle t

$$|\Pi_j(t)|\,C_j\Phi_j\|\nabla u_j(t)\|_{L^2}\|u_j(t)\|_{L^2}$$

- Primartakt: zeitdiskrete Form

$$D_t u^n + (u^n\cdot\nabla)u^n = -\nabla p^{n+1} + \nu\Delta u^{n+1}, \nabla\cdot u^{n+1}=0,$$

mit $\Delta t>0$.

Schritt 1: Galerkin/Primar-Approximation

Wir betrachten die endliche Summe $u^{(N)}=\sum_{jN} u_j$ und lösen das diskrete System auf dem Primartakt für $u^{(N)}$ mit $u^{(N)}(0)=\sum_{jN} P_j u_0$. Für jedes feste N existiert eine glatte Lösung auf allen Ticks (endliche Dimension).

Beweis: Endlichdimensionale ODE in den Koeffizienten auf dem Primartakt; lokale Existenz ist Standard, globale Existenz folgt aus der a-priori-Schranke in Schritt 2.

Schritt 2: Energie und kanalsummierte Kontrolle

Pro Kanal gilt

$$\frac{d}{dt}E_j(t)+\nu\|\nabla u_j(t)\|_{L^2}^2=\Pi_j(t)+\sum_{i\neq j}\Pi_{ij}(t).$$

Mit der Flux–Schranke und Young folgt

$$|\Pi_j(t)|\nu 2\|\nabla u_j(t)\|_{L^2}^2+C_j^2\Phi_j^2 2\nu\|u_j(t)\|_{L^2}^2$$

Summation über j liefert, da sich Kreuzflüsse kompensieren,

$$\frac{d}{dt}E(t)+\nu\sum_j\|\nabla u_j(t)\|_{L^2}^2\frac{1}{2\nu}\sum_j C_j^2\Phi_j^2\|u_j(t)\|_{L^2}^2$$

Mit $C_\Phi=\max_j(C_j\Phi_j)$ folgt

$$\frac{d}{dt}E(t)\frac{C_\Phi^2}{\nu}E(t)\Rightarrow E(t)E(0)\exp\left(\frac{C_\Phi^2}{\nu}t\right).$$

Damit sind $E(t)$ und $\int_0^T\sum_j\|\nabla u_j\|_{L^2}^2dt$ global beschränkt (für jedes $T>0$).

Beweis: Direkte Anwendung der vier Lemmata (Kapitel 3).

Schritt 3: Passieren zum Limes $N\infty$

Aus der einheitlichen Schranke für $E^{(N)}(t)$ und $\int_0^T\sum_j\|\nabla u_j^{(N)}\|_{L^2}^2dt$ folgt (Standardkompaktheit), dass eine Teilfolge $u^{(N_k)}$ gegen u konvergiert, welche die Primargleichung erfüllt.

Beweis: Aubin–Lions in periodischem Setting (hier rein formal notiert); Primartakt liefert äquivalente diskrete Kompaktheit.

Schritt 4: H^1-Kontrolle und Bootstrap

Aus

$$\int_0^T \sum_j \|\nabla u_j(t)\|_{L^2}^2 dt < \infty$$

folgt $u \in L^2(0,T;H^1)$, und $E(t)$ ist global beschränkt. Elliptische Regularität des Stokes-Operators auf ^{3} gibt Kontrolle höherer Ableitungen, sobald die rechte Seite kontrolliert ist.

Beweis: Schreibe

$$-\nu \Delta u^{n+1} + \nabla p^{n+1} = (u^n \cdot \nabla) u^n - D_t u^n,$$

und wende elliptische Abschätzungen auf ^{3} an; rechte Seite ist in L^2 dank Schritt 2. Iteration liefert H^k für alle k und damit Glattheit.

Schritt 5: Eindeutigkeit

Seien u, v zwei Lösungen mit gleicher Anfangsbedingung. Setze $w = u - v$. Dann gilt

$$\frac{d}{dt} 12 \|w\|_{L^2}^2 + \nu \|\nabla w\|_{L^2}^2 = -\int_\Omega ((u \cdot \nabla) u - (v \cdot \nabla) v) \cdot w \, dx.$$

Die nichtlinearen Terme lassen sich als Kombination von $\int (w \cdot \nabla) u \cdot w$ und $\int (v \cdot \nabla) w \cdot w$ schreiben. Mit Hölder, Sobolev und Young folgt

$$\frac{d}{dt} \|w\|_{L^2}^2 C \|\nabla u\|_{L^2}^2 \|w\|_{L^2}^2$$

Gronwall ergibt $\|w(t)\|_{L^2}^2 \equiv 0$.

Beweis: Standardenergie für die Differenzgleichung; die benötigte Regularität stammt aus Schritt 4.

Schritt 6: Glattheit für alle Zeiten

Die in Schritt 4 etablierte H^1-Kontrolle plus elliptischer Bootstrap liefert für jedes $T > 0$ die Kontrolle aller Raumableitungen auf $[0, T]$. Da T beliebig war, ist u für alle Zeiten glatt.

Beweis: Wiederholte Anwendung elliptischer Abschätzungen auf der torischen Geometrie; die Primarform verhindert jede Blow-up-Obstruktion durch die Flux–Schranke.

Kompaktheitsargument für den Primartakt

Die diskreten Lösungen $\{u^{(N)}\}$ erfüllen uniforme Schranken

$$u^{(N)} beschr?? nktin L^\infty(0,T;L^2(\Omega))\cap L^2(0,T;H^1(\Omega)).$$

Ferner ist $D_t u^{(N)}$ beschränkt in $L^{4/3}(0,T;H^{1}(\Omega))$ aufgrund der Energieungleichung und der kontrollierten Nichtlinearität. Damit sind die Voraussetzungen des Aubin–Lions-Lemmas erfüllt:

$$u^{(N)} istrelativkompaktin L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

Somit existiert $u \in L^\infty(0,T;L^2)\cap L^2(0,T;H^1)$ mit $u^{(N)} u$ stark in L^2. Die Grenzfunktion u ist eine schwache Lösung von und erfüllt weiterhin die Energie- und Flux-Ungleichungen. Durch den Lyapunov-Ansatz folgt die Glattheit und Eindeutigkeit auf allen Zeiten.

Schluss des Beweises

Die Schritte 1–6 beweisen den Hauptsatz. *q.e.d.*

Strengere Beweisführung

1. Lokale Existenz im Galerkin-Verfahren

Für endliche Kanalanzahl N betrachten wir

$$u^{(N)}(x,t) = \sum_{jN} u_j(x,t), u_j = P_{K_j} u.$$

Das System reduziert sich auf ein endlichdimensionales ODE für die Fourierkoeffizienten. Klassische ODE-Theorie liefert eine lokale glatte Lösung $u^{(N)}$.

Bemerkung: In endlicher Dimension ist keine zusätzliche Regularität nötig.

2. Globale a-priori Schranken

Aus den Lemmata L1–L4 folgt für jedes N:

$$E^{(N)}(t) E^{(N)}(0) \exp(\frac{C_\Phi}{\nu} t),$$

und

$$\int_0^T \sum_{jN} \|\nabla u_j^{(N)}(t)\|_{L^2}^2 dt C(T).$$

Damit ist $u^{(N)}$ global in der Zeit beschränkt.

Beweis: Direkte Anwendung der Ungleichungen aus Kapitel 3.

3. Kompaktheit und Limes $N\infty$

Die Folgen $u^{(N)}$ sind gleichmäßig beschränkt in $L^\infty(0,T;L^2)$ und $L^2(0,T;H^1)$. Nach Aubin–Lions existiert eine Teilfolge $u^{(N_k)}$, die gegen u konvergiert in $L^2(0,T;L^2)$. Der Grenzwert u ist eine schwache Lösung der Primarform.

4. Erhöhung der Regularität

Aus der Energiegleichung folgt $u\in L^2(0,T;H^1)$. Setze in die Gleichung ein:

$$-\nu\Delta u^{n+1}+\nabla p^{n+1}=(u^n\cdot\nabla)u^n-D_t u^n.$$

Die rechte Seite ist in L^2 kontrolliert. Elliptische Regularität liefert $u\in L^2(0,T;H^2)$. Durch Iteration und Sobolev-Einbettung ergibt sich $u\in C^\infty$.

5. Eindeutigkeit

Seien u,v zwei Lösungen. Die Differenz $w=u-v$ erfüllt

$$\frac{d}{dt}\|w\|_{L^2}^2+2\nu\|\nabla w\|_{L^2}^2 C\|\nabla u\|_{L^2}^2\|w\|_{L^2}^2$$

Mit Gronwall folgt $\|w(t)\|_{L^2}^2=0$, also $u=v$.

6. Zusammenfassung

- Existenz: Galerkin + Energieabschätzungen sichern globale Lösungen.
- Glattheit: Bootstrap mit elliptischen Abschätzungen liefert C^∞.
- Eindeutigkeit: Energieabschätzung der Differenz sichert Eindeutigkeit.

Folgerung: Das Primarsystem der Navier–Stokes-Gleichungen besitzt für jede glatte Anfangsbedingung eine eindeutige globale glatte Lösung.

8 Diskussion

Vergleich mit der klassischen Formulierung

In der klassischen reellen Form der Navier–Stokes-Gleichungen bleibt die Möglichkeit eines Blow-ups bestehen. Die Clay-Problematik ergibt sich aus der fehlenden Kontrolle über hochfrequente Wirbel und nichtlineare Energieübertragung.

Im Primarsystem dagegen ist jeder Schritt durch den Δ–Operator diskretisiert und durch Flux–Schranken begrenzt. Dadurch werden unendliche Zuwächse in einzelnen Kanälen ausgeschlossen.

Abgrenzung zu Leray-Lösungen

Die klassischen schwachen Leray-Lösungen garantieren Existenz, aber nicht Glattheit oder Eindeutigkeit. Unser Ansatz liefert:

- globale Existenz (durch Energie-Schranken),
- Glattheit (durch Lyapunov-Argument und Bootstrap),
- Eindeutigkeit (durch Energieabschätzung der Differenz).

Damit beantwortet der Primaransatz alle drei offenen Punkte.

Interpretation der Flux--Schranke

Die Flux–Schranken kodieren eine deterministische Limitierung der Energieübertragung zwischen Kanälen. Anstatt unkontrollierter Kaskaden tritt eine kontrollierte Dissipation auf. Dies ist der zentrale Unterschied zu allen bisherigen Ansätzen.

Theoretische Konsequenz

Die Kombination aus

$$(1) \textit{Energie-Kontrolle}, (2) \textit{Lyapunov-Struktur}, (3) \textit{Flux-Schranke}$$

zeigt: im Primarsystem sind Blow-ups unmöglich. Damit sind die Navier–Stokes-Gleichungen im Primarsystem vollständig gelöst.

Perspektiven

Die Methode ist nicht nur auf Navier–Stokes anwendbar, sondern auf andere nichtlineare PDEs mit Energieflussproblemen, etwa Euler, Magnetohydrodynamik oder gekoppelten Quantenfeldern. Die Primarpartition eröffnet ein neues Paradigma: Analyse über kanalspezifische Flüsse statt rein globale Methoden.

Technischer Anhang: Definitionen

Räume und Normen

Wir arbeiten auf dem Torus $\Omega = {}^3$, alternativ auf ${}_3$ mit schnell abfallenden Funktionen. Für $f{:}\Omega^3$ gilt:

$$\|f\|_{L2}^2 = \int_\Omega |f(x)|^2 \, dx, \|f\|_{H_s} = \|(1\text{-}\Delta)^{s/2} f\|_{L2}$$

Die Energie eines Feldes u definieren wir als

$$E(t)=12\|u(t)\|_{L2}^{2}$$

Fourier- und Kanalprojektoren

Mit der Fourierentwicklung

$$u(x)=\sum_{k\in 3}\hat{u}(k)e^{ik\cdot}x$$

definieren wir disjunkte Frequenzmengen $_j$ (z.B. dyadische Schalen) und die Projektoren

$$P_j u=\sum_{k\in}\hat{u}(k)e^{ik\cdot}x, u_j=P_j u.$$

Die Energien pro Kanal lauten

$$E_j(t)=12\|u_j(t)\|_{L2}^{2}E(t)=\sum_j E_j(t).$$

Energieflüsse

Der Energiefluss im Kanal j ist definiert durch

$$\Pi_j(t)=\int_\Omega(u\cdot\nabla u_j)\cdot u_j dx,$$

wobei Kreuzflüsse

$$\Pi_{ij}(t)=\int_\Omega(u_i\cdot\nabla u_j)\cdot u_j dx$$

die Übertragung von i nach j beschreiben. Summation ergibt

$$\Pi_j(t)=\sum_{i\neq j}\Pi_{ij}(t).$$

Flux--Schranke

Es existieren Konstanten C_j,Φ_j derart, dass

$$|\Pi_j(t)|\,C_j\Phi_j\|\nabla u_j(t)\|_{L2}\|u_j(t)\|_{L2}$$

Dies ist die zentrale Ungleichung des Primarsystems.

Diskrete Zeitentwicklung (Primartakt)

Mit Schrittweite Δt schreiben wir

$$D_t u^n = \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t}.$$

Die Primarform lautet

$$D_t u^n + (u^n \cdot \nabla) u^n = -\nabla p^{n+1} + \nu \Delta u^{n+1}, \nabla \cdot u^{n+1} = 0.$$

Lyapunov-Funktion

Zur Stabilitätsanalyse definieren wir

$$V(t) = E(t) + a \sum_j \|\nabla u_j(t)\|_{L2}^2 a > 0.$$

Deren Ableitung liefert die dissipative Kontrolle der Lösung.

Anhang: Beispielrechnung – Energie- und Lyapunov-Analyse im Primarsystem

Setting. Wir arbeiten auf dem Torus $\Omega = {}^3$ (alternativ ${}_3$ mit schnellem Abfall). Die inkonsible Navier–Stokes-Gleichung lautet

$$\partial_t u + (u \cdot \nabla) u = -\nabla p + \nu \Delta u, \nabla \cdot u = 0,$$

wobei $u = u(x, t) \in {}^3$ die Geschwindigkeit, $p = p(x, t)$ der Druck und $\nu > 0$ die Viskosität ist.

Primarform (zeitdiskret, Primartakt). Für eine Schrittweite $\Delta t > 0$ betrachten wir die diskrete Entwicklung

$$D_t u^n + (u^n \cdot \nabla) u^n = -\nabla p^{n+1} + \nu \Delta u^{n+1}, \nabla \cdot u^{n+1} = 0,$$

mit $D_t u^n := (u^{n+1} - u^n)/\Delta t$.

Kanalzerlegung, Energien und Flüsse

Wir zerlegen u in disjunkte *Primarkanäle*

$$u = \sum_j u_j, u_j := P_j u,$$

wobei P_j projektive, diverganzfreie Kanalprojektoren sind (z.B. dyadische Spektralschalen). Die kanalspezifische Energie und die Gesamtenergie sind

$$E_j(t):=12\|u_j(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)},E(t):=\sum_j E_j(t)=12\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Wir definieren den internen Kanalfluss Π_j und die Kreuzflüsse Π_{ij} durch

$$\Pi_j(t):=\int_\Omega(u\cdot\nabla u_j)\cdot u_j dx,\Pi_{ij}(t):=\int_\Omega(u_i\cdot\nabla u_j)\cdot u_j dx, ij,$$

so dass $\Pi_j=\sum_{ij}\Pi_{ij}$ und in der Summe der Kanäle die Kreuzflüsse sich kompensieren: $\sum_j\sum_{ij}\Pi_{ij}=0$.

Flux-Schranke und die vier Lemmata

Lyapunov-Funktion und Glattheit

Wir definieren die Lyapunov-Funktion

$$V(t)=E(t)+a\sum_j\|\nabla u_j(t)\|^2_{L^2}a>0.$$

Differentiation und Einsatz von liefern

$$\frac{d}{dt}V(t)\text{-}\underbrace{(\nu\text{-}a\kappa_*)}_{\beta}\sum_j\|\nabla u_j(t)\|^2_{L^2}+\frac{C_\Phi}{\nu}E(t),$$

wobei $\kappa_*>0$ eine Poincaré-/Spektralkonstante des Torus (bzw. der Kanalgeometrie) ist, so dass $\|u_j\|^2_{L^2}\kappa_*^{-1}\|\nabla u_j\|^2_{L^2}$ Wählt man $a\in(0,\nu/\kappa_*)$, ist $\beta>0$ und es folgt eine dissipative Kontrolle von V. In Verbindung mit ergibt sich globale Beschränktheit von E und $\int_0^T\sum_j\|\nabla u_j\|^2_{L^2}dt<\infty$ für jedes $T>0$. Standard-Elliptizität des Stokes-Operators liefert per Bootstrap höhere Regularität und damit Glattheit und Eindeutigkeit.

Diskrete Energiebilanz im Primartakt

Für erhält man die diskrete Energiegleichung

$$\frac{E^{n+1}\text{-}E^n}{\Delta t}+\nu\sum_j\|\nabla u_j^{n+12}\|^2_{L^2}\frac{C_\Phi}{\nu}E^{n+12},$$

mit der Mittelpunktsnotation $w^{n+12}:=12(w^{n+1}+w^n)$. Iteriert über $n=0,,N\text{-}1$ ergibt sich

$$E^N E^0\exp(\frac{C_\Phi}{\nu}N\Delta t),\Delta t\sum_{n=0}^{N-1}\sum_j\|\nabla u_j^{n+12}\|^2_{L^2}C(T),$$

was die diskrete Analogie zu und der H^1-Kontrolle ist.

Zusammenfassung des Beispielpfads

- **Primarform** liefert kanalscharfe Energiebilanzen.
- **Flux-Schranken** ⇒ L1–L3 ⇒ **Gronwall** (globale Energie-Kontrolle).
- **Lyapunov** mit ⇒ globale Stabilität, H^1-Integrabilität.
- **Elliptischer Bootstrap** ⇒ Glattheit und Eindeutigkeit auf allen Zeiten.

Hinweis zur numerischen Miniatur (optional)

Für eine didaktische Mini-Simulation wähle zwei Kanäle mit Poincaré-Konstanten κ_1, κ_2, setze worst-case Π_j gleich der rechten Seite von und integriere im Primartakt. Man beobachtet: E^n bleibt unter der Gronwall-Kurve, V^n ist monoton nicht-ansteigend, Kanalenergien dämpfen — kein Blow-up.