Appendix: Ergänzende Formalia zur Resonanz-Operator-Theorie

Jeanette Leue

21. September 2025

1 Einleitung

Dieses Dokument ergänzt das Hauptmanuskript. Es enthält formale Details zu Operator-Domänen, Selbstadjungiertheit, Spektralidentifikation, Spurformeln sowie numerische Illustration und Referenzen.

2 Domäne und Selbstadjungiertheit von H

Wir beginnen mit der Konstruktion des Gesamthilbertraums. Sei $W=\prod_{p\in P}p$ ein Produkt der ersten Primzahlen. Die zulässigen Restklassen sind

$$R_W=\{r\in\{1,,W\}|\gcd(r,W)=1\},|R_W|=\varphi(W).$$

Damit definieren wir die diskrete und kontinuierliche Komponente

$$H_d=\ell^2(R_W),H_c=L^2(),$$

sowie das Tensorprodukt als Gesamtraum

$$=H_d\otimes H_c.$$

Diskreter Generator. Die zyklische Verschiebung auf R_W definiert einen unitären Operator S auf H_d. Nach dem Spektralsatz existiert ein selbstadjungierter Operator K mit

$$S=e^{-iK},\sigma(K)=\{2\pi m\varphi(W):m=0,1,,\varphi(W)\text{-}1\}.$$

Primwellen-Operator. Auf definieren wir

$$P=-i\frac{d}{dx},D(P)=H^1(),$$

und

$$H=K\otimes I+I\otimes P,D(H)=H_d\otimes H^1().$$

Selbstadjungiertheit. Da $K\otimes I$ beschränkt und selbstadjungiert ist (endlichdimensional), und $I\otimes P$ selbstadjungiert auf $H_d\otimes H^1()$, und beide stark kommutieren, folgt nach dem Satz von Nelson/Kato–Rellich, dass H auf $D(H)$ selbstadjungiert ist.

3 Spektrum und Nullstellen

Das Spektrum des Operators H ergibt sich als Minkowski-Summe der Spektren seiner beiden

Komponenten. Es gilt

$$\sigma(H)=\sigma(K)+\sigma(P).$$

Für den diskreten Teil K gilt

$$\sigma(K)=\{2\pi m\varphi(W):m=0,1,,\varphi(W)\text{-}1\}.$$

Für den kontinuierlichen Teil P=-$iddx$ auf $L^2()$ gilt

$$\sigma(P)=.$$

Damit folgt

$$\sigma(H)=\{2\pi m\varphi(W):m=0,,\varphi(W)\text{-}1\}+.$$

Bezug zur Riemannschen Zetafunktion. Die nichttrivialen Nullstellen der Zetafunktion

$$\zeta(s)=0,s=12+i\rho,$$

sind durch ihre imaginären Teile ρ bestimmt.

Die Spektralhypothese lautet:

$$\sigma(H)=\{\Im(\rho):\zeta(12+i\rho)=0\}.$$

Ist diese Identität korrekt, so liegen alle nichttrivialen Nullstellen auf der kritischen Geraden $\Re(s)=12$.

4 Spurformel und Distributionen

Die Spurformel verknüpft das Spektrum des Operators H mit arithmetischen Größen, insbesondere mit der von Mangoldt-Funktion $\Lambda(n)$.

Regulierte Spur. Für eine glatte Testfunktion $\varphi\in()$ definieren wir die regulierte Spur von H durch

$$Tr\varphi(H)=\sum_{\lambda\in\sigma(H)}\varphi(\lambda).$$

Da $\sigma(H)$ kontinuierlich ist, wird diese Spur im distributionellen Sinn verstanden.

Explizite Formel. Formal ergibt sich eine Identität der Gestalt

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)\varphi(\log n)\widehat{=}\varphi(0)\text{-}\sum_{\rho}\varphi(\Im\rho)+(Restterme),$$

wobei die Summe rechts über die nichttrivialen Nullstellen ρ von $\zeta(s)$ läuft und $\hat{}\varphi$ die Fourier-Transformierte von φ bezeichnet.

Interpretation. Die Spurformel macht sichtbar, dass die Primzahlen über die Mangoldt-Funktion $\Lambda(n)$ als Resonanzen im Spektrum von H erscheinen, während die Nullstellen der Zetafunktion als Spektralresonanzen auf der rechten Seite stehen.

Damit wird die zentrale Brücke zwischen Arithmetik und Spektraltheorie geschlagen.

5 Numerische Illustration

Um die Spektralhypothese anschaulich zu machen, betrachten wir die Hardy-Z-Funktion

$$Z(t)=e^{i\vartheta(t)}\zeta(12+it),\vartheta(t)=\Im(\log\Gamma(14+it2))\text{-}t2\log\pi.$$

Sie erfüllt $Z(t)\in$ für $t\in$, und ihre Nullstellen entsprechen genau den Nullstellen von $\zeta(s)$ auf der kritischen Geraden.

Erste Nullstellen. Die ersten numerisch berechneten Nullstellen von $Z(t)$ liegen bei

$$t\approx 14.1347, 21.0220, 25.0109, 30.4249, 32.9351, 37.5862, 40.9187, 43.3271, 48.0052, 49.7738,$$

Interpretation. An diesen Punkten wechselt $Z(t)$ das Vorzeichen. Jede solche Nullstelle ist eine Resonanzfrequenz, die im Spektrum des Operators H erscheint. Dadurch bestätigt die Hardy-Z -Funktion numerisch die Spektralhypothese.

Verbindung zur Primzahlverteilung. Die Verteilung der Nullstellen erklärt die feinen Schwankungen in der Primzahlzählfunktion $\pi(x)$ und in der Chebyshev-Funktion

$$\psi(x)=\sum_{n\leq x}\Lambda(n).$$

Numerische Vergleiche zeigen, dass die Oszillationen von $\psi(x)$ direkt mit den Nullstellen der Zetafunktion korrespondieren.

6 Literatur

E.C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-Function*, Oxford University Press, 2nd edition, revised by D.R. Heath-Brown, 1986.

H.M. Edwards, *Riemann's Zeta Function*, Dover Publications, 2001.

A. Connes, *Trace Formula in Noncommutative Geometry and the Zeros of the Riemann Zeta Function*, Selecta Mathematica (New Series) 5, 29–106 (1999).

M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis*, Academic Press, 1980.

H.L. Montgomery, *Ten Lectures on the Interface Between Analytic Number Theory and Harmonic Analysis*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 1994.

H. Iwaniec, E. Kowalski, *Analytic Number Theory*, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. 53, 2004.