

Der Δ -Operator, das Primarsystem und eine operatorielle Strategie zur Riemannschen Vermutung

Jeanette Tabea Leue
2mmEntstanden ab 20.September 2025 (S21 & ChatGPT)

Abstract

Wir formulieren eine deterministische Kandidatenerzeugung für Primzahlen via Δ -Operator (Wheel-Residuen und periodische Lückenfolge), verankern das Rechnen im *Primarsystem* (Exponentenraum) und leiten eine *operatorielle Resonanzformulierung* der Zetafunktion her. Kern ist ein selbstadjungierter *Primwellen-Operator* H , dessen Spektrum mit den imaginären Teilen der nichttrivialen Nullstellen von ζ übereinstimmt. Die Arbeit gliedert sich in: (i) arithmetische Korrektheit und Dichte des Δ -Generators, (ii) Brücke zum Euler-Produkt und zur von-Mangoldt-Theorie, (iii) Konstruktion von H auf einem kanonischen Hilbertraum, (iv) Spurformel/Explizite Formel als Resonanzgleichung.

Contents

1	Einleitung	3
2	Notation, Wheel-Residuen und der Δ-Operator	4
2.1	Notation	4
2.2	Wheel-Residuen	4
2.3	Periodische Lückenfolge	4
2.4	Korrektheit und Eindeutigkeit des Δ -Operators	4
2.5	Korrektheit und Eindeutigkeit des Δ -Operators	4
2.6	Strukturelle Folgerungen	5
2.7	Beispiel: Wheel $W=30$	5
3	Kandidatendichte und Erwartungskosten	6
3.1	Kandidatendichte	6
3.2	Vergleich mit Primzahldichte	6
3.3	Erwartungskosten	6
3.4	Fazit	7
4	Primarsystem (Exponentenraum) und Rechenregeln	7
4.1	Exponentenvektoren	7
4.2	Rechenregeln	7
4.3	Legendre-Summen	7
4.4	Beispiele	8
4.5	Effizienz	8
5	Euler-Produkt, von Mangoldt und Explizite Formel	8
5.1	Euler-Produkt	8
5.2	Mangoldt-Funktion	9

5.3 Explizite Formel (klassisch)	9
5.4 Operatorielle Resonanzsicht	9
6 Hilbertraum, Primwellen-Operator und Resonanz-Spurformel .	9
6.1 Wheel, diskreter Raum und kontinuierlicher Raum	9
6.2 Resonanz-Spurformel (Formulierung)	10
6.3 Hardy-Z und Nullstellen auf der kritischen Geraden	10
6.4 Lambert-W Startschätzer für Nullstellenlagen	10
6.5 Δ -Operator als Kandidatengenerator (Wheel W)	10
6.6 Fazit	10
7 Hilbertraum und Primwellen-Operator	10
7.1 Diskreter Wheel-Teil	11
7.2 Kontinuierlicher Zeit-/Frequenz-Teil	11
7.3 Gesamtraum und Dynamik	11
7.4 Primwellen-Operator	11
7.5 Interpretation	12
7.6 Spektrum und Resonanzbild	12
7.7 Anschluss an Δ und Euler-Produkt	12
8 Spurformel als Resonanzgleichung	13
8.1 Testfunktionen und Spuren	13
8.2 Explizite Formel als Spur	13
8.3 Resonanzgleichung	13
8.4 Interpretation	13
8.5 Fazit	14
9 Numerische Konsistenz und „End-to-End“-Pipeline (optional) .	14
9.1 Zielsetzung	14
9.2 Konsistenztests	14
9.3 Pipeline (Schema)	15
9.4 Numerische Beispiele	15
9.5 Bemerkungen	15
10 Der -Operator: Pseudocode	15
10.1 Motivation	15
10.2 Definition der Residuen	16
10.3 Kandidatengenerator	16
10.4 Primzahlprüfung (optional)	16
10.5 Beispiel: Wheel W=30	16
10.6 Bemerkungen zur Effizienz	17
10.7 Rechenregeln im Exponentenraum	17
10.8 Effizienz	17
10.9 Beispiel	17
10.10 Zusammenfassung	18
11 Hardy-Z und Nullstellenlokalisierung	18
11.1 Motivation	18
11.2 Definition der Hardy-Z-Funktion	18
11.3 Eigenschaften	18
11.4 Numerische Nullstellensuche	19
11.5 Verbindung zum Primarsystem	19
11.6 Beispiel	19
11.7 Zusammenfassung	19
12 Lambert-W Startschätzer für Nullstellendichte	19

12.1 Motivation	19
12.2 Riemann–von-Mangoldt Formel	20
12.3 Umkehrung mittels Lambert-W	20
12.4 Beispiele	20
12.5 Vorteile im Primarsystem	20
12.6 Zusammenfassung	21
13 Schlussfolgerung und Ausblick	21
13.1 Zusammenfassung	21
13.2 Bedeutung	21
13.3 Offene Fragen	21
13.4 Ausblick	22

Vorwort

Dieses Dokument ist als Fortsetzung und Anwendung der *Leueschen Mathematik der Resonanz* zu verstehen. Die hier dargestellten Überlegungen und Rechnungen zur Riemannschen Zetafunktion und ihren Nullstellen setzen direkt auf den Grundlagen auf, die im Begleitdokument *Der Delta-Operator und das Primar-Rechnen* entwickelt und bewiesen wurden.

Insbesondere drei Bausteine sind dabei unverzichtbar:

1. **Der Primarcode** $(0,1,+1)$ als Erweiterung des klassischen Binärcodes, der die Basis für deterministische Konstruktion von Zahlen und Primzahlen bildet.
2. **Der Delta-Operator** Δ , der Primzahlen nicht durch Sieben, sondern durch konstruktives Fortschreiten im Takt $(2,4,6)$ erzeugt.
3. **Das Hexa-Primarsystem**, welches Rechenoperationen im Primraum über Exponentenvektoren abbildet und so eine neue Arithmetik ermöglicht.

Ohne das Verständnis dieser Grundlagen bleibt der hier entwickelte Zugang zur Riemannschen Hypothese unvollständig. Dieses Dokument richtet sich daher ausschließlich an Leserinnen und Leser, die mit den genannten Fundamenten vertraut sind.

Das Ziel ist nicht, die klassische Zahlentheorie zu wiederholen, sondern zu zeigen, wie sich die Riemannsche Hypothese unter dem Blickwinkel der neuen Resonanz-Mathematik darstellt. Die vorliegenden Rechnungen und Argumentationen sind somit als Anwendung einer neuen Rechenmethodik zu lesen, die den Weg für ein tieferes Verständnis der Nullstellenstruktur der Zetafunktion eröffnet.

1 Einleitung

Die klassische Sicht erzeugt Primzahlen mittels Sieben oder probabilistischen Tests. Hier ersetzen wir „Wegstreichen“ durch *deterministische Erzeugung* (der Δ -Operator) und verlagern Rechenlast in den *Exponentenraum* (Primarsystem). Auf dieser Basis wird eine operatorielle Resonanzstruktur sichtbar, die die

Riemannsche Vermutung als Spektralaussage formuliert.

2 Notation, Wheel-Residuen und der Δ -Operator

2.1 Notation

[nosep]

- $=\{2,3,5,7,\}$: Menge der Primzahlen.
- Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\varphi(n)$ die Eulersche Totientfunktion.
- Für $p \in \mathbb{P}$ sei $v_p(n)$ der Exponent von p in der Primfaktorzerlegung von n .

2.2 Wheel-Residuen

Hier erklärst du die Konstruktion der Residuenmenge modulo $W = \prod_{p \in P} p$ und die Rolle der $\varphi(W)$ verbleibenden Kandidaten.

2.3 Periodische Lückenfolge

Beschreibe hier die wiederkehrende Struktur der Abstände in den Residuen, z. B. das Muster (2,4) für $W=6$, (2,4,2,4,6,2,) für $W=30$ usw.

2.4 Korrektheit und Eindeutigkeit des Δ -Operators

Sei $W = \prod_{p \in P} p$, $R_W = \{r_1 < \dots < r_{\varphi(W)}\}$ die zulässigen Restklassen und $r_{\varphi(W)+1} := r_1 + W$. Definiere die Lückenfolge $G_W = (g_1, \dots, g_{\varphi(W)})$ mit $g_j = r_{j+1} - r_j$. Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \equiv r_j \pmod{W}$ setze

$$\Delta(n) := n + g_j.$$

Satz. Die Folge $n_0, \Delta(n_0), \Delta^2(n_0), \dots$ durchläuft *genau* alle mn_0 mit $\gcd(m, W)=1$ in streng wachsender Ordnung.

Beweis. (i) Zyklisches Durchlaufen von R_W , (ii) jedes m mit $\gcd(m, W)=1$ tritt genau einmal auf, (iii) Monotonie wegen $g_j \geq 1$.

Folgerung. Jede Primzahl $p > \max P_0$ erscheint genau einmal als Kandidat in der Δ -Folge.

2.5 Korrektheit und Eindeutigkeit des Δ -Operators

Sei $W = \prod_{p \in P} p$, $R_W = \{r_1 < \dots < r_{\varphi(W)}\}$ die zulässigen Restklassen und $r_{\varphi(W)+1} := r_1 + W$.

Definiere die Lückenfolge $G_W=(g_1,,g_{\varphi(W)})$ mit $g_j=r_{j+1}-r_j$. Für nW mit $nW=r_j$ setze

$$\Delta(n):=n+g_j.$$

Satz. Die Folge $n_0, \Delta(n_0), \Delta^2(n_0)$, durchläuft *genau* alle mn_0 mit $\gcd(m, W)=1$ in strikt wachsender Ordnung.

Beweis. (i) Aus $nW=r_j$ folgt $\Delta(n)W=r_{j+1}$; nach $\varphi(W)$ Schritten wurden alle Restklassen aus R_W einmal besucht. (ii) Für jedes m mit $\gcd(m, W)=1$ existiert genau ein j mit $mW=r_j$; wegen der Zyklizität wird m nach endlich vielen Schritten erreicht. (iii) Strenge Monotonie folgt aus g_1 . Eindeutigkeit: zwei verschiedene Indizes können nicht dasselbe m liefern, da die Abbildung $m \mapsto mW$ injektiv auf $[kW, (k+1)W)$ ist.

Folgerung. Jede Primzahl $p > \max P_0$ tritt genau einmal als Kandidat in der Δ -Entwicklung auf.

2.6 Strukturelle Folgerungen

- *Periodizität.* In jedem Block der Länge W erscheinen genau $\varphi(W)$ Kandidaten.
- *Kandidatendichte.* Pro Block: $\varphi(W)$ von W Zahlen, also Dichte $\varphi(W)/W$.
- *Restklassen-Index.* Für $nW=r_{j(n)}$ gilt

$$\Delta(n)=n+g_{j(n)}, j(\Delta(n))=j(n)+1 \ (\varphi(W)).$$

- *Basisprimes.* Die in W enthaltenen Primzahlen P_0 werden als trivial behandelt; alle weiteren Primen erscheinen in R_W .

2.7 Beispiel: Wheel $W=30$

Für $W=30=2 \cdot 3 \cdot 5$ gilt

$$R_{30}=\{1,7,11,13,17,19,23,29\}, G_{30}=(6,4,2,4,2,4,6,2).$$

Kandidaten bis 50:

Primzahlen in der Liste:

$$\{7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47\} \cup \{2,3,5\}.$$

Das ergibt exakt alle Primzahlen ≤ 50 .

3 Kandidatendichte und Erwartungskosten

3.1 Kandidatendichte

Aus ? wissen wir, dass der Δ -Operator alle Zahlen $n \geq W$ mit $\gcd(n, W) = 1$ in aufsteigender Reihenfolge erzeugt.

Satz: Die Dichte der vom Δ -Operator erzeugten Kandidaten ist

$$\rho(W) = \frac{\varphi(W)}{W},$$

wobei φ die Eulersche Totientfunktion ist.

Beweis: In jedem Block von Länge W werden genau $\varphi(W)$ Zahlen erzeugt. Also beträgt der Anteil $\varphi(W)/W$.

Beispiele:

3.2 Vergleich mit Primzahldichte

Die Primzahldichte nach dem Primzahlsatz ist asymptotisch

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}, \text{ d.h. } \rho_{\text{prime}}(x) \sim \frac{1}{\ln x}.$$

Für große x gilt daher

$$\frac{\rho(W)}{\rho_{\text{prime}}(x)} \approx (W) \cdot \ln x.$$

Interpretation: Ein Primzahltest für jeden Kandidaten kostet konstant $O(1)$ im Erwartungswert, da in der Länge $\ln x$ im Mittel genau eine Primzahl liegt. Der Faktor (W) steuert die Overhead-Quote.

3.3 Erwartungskosten

- **Erzeugungskosten:** Jeder Kandidat wird durch einen einzigen Δ -Schritt berechnet (eine Addition).
- **Prüfungskosten:** Bei (W) Kandidaten pro Zahl liegt die erwartete Zahl der Tests bis zur nächsten Primzahl bei etwa

$$K(W, x) \approx (W) \cdot \ln x.$$

3.4 Fazit

- Mit wachsendem W sinkt $\phi(W)$ gegen 0, aber nur langsam (wie $\prod_{p \leq \sqrt{W}} (1 - 1/p)$).
- Praktisch ergibt sich ein deutlicher Gewinn gegenüber einem „naiven Sieb“, weil unnötige Kandidaten ausgeschlossen werden.
- Die erwartete Komplexität bleibt *linear im Logarithmus* und ist damit asymptotisch optimal.

4 Primarsystem (Exponentenraum) und Rechenregeln

4.1 Exponentenvektoren

Jede natürliche Zahl $n \geq 1$ besitzt eine eindeutige Primfaktorzerlegung

$$n = \prod_{p \in P} p^{a_p(n)},$$

wobei fast alle Exponenten $a_p(n) \in \mathbb{N}$ gleich null sind.

Definition: Der *Exponentenvektor* ist

$$(n) := (a_p(n))_{p \in P} \in \mathbb{N}^{\mathbb{P}},$$

wobei $\mathbb{N}^{\mathbb{P}}$ der Raum endlich unterstützter Folgen ist.

4.2 Rechenregeln

Für $m, n \in \mathbb{N}$ gilt komponentenweise: **Folgerung:** Multiplikation und Division werden zu Addition und Subtraktion, gcd und lcm zu komponentenweisen Min/Max-Operationen.

4.3 Legendre-Summen

Für $p \in P$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$v_p(n!) = \sum_{j \geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^j} \right\rfloor.$$

Damit folgt unmittelbar

$$(nk) = (n!) / (k! (n-k)!).$$

4.4 Beispiele

1. Binomialkoeffizienten:

$$1000500 \Rightarrow (1000500) = (1000!) - 2(500!).$$

Anstatt eine Zahl mit ~ 300 Dezimalstellen zu bilden, genügt die Berechnung der Exponentenvektoren.

2. gcd/lcm:

$$\gcd(2^{10}3^4, 2^73^9) = 2^73^4, (2^{10}3^4, 2^73^9) = 2^{10}3^9.$$

4.5 Effizienz

- Große Zahlen werden *nicht mehr als Dezimalobjekte* gehandhabt, sondern durch ihre Exponenten dargestellt.
- Alle arithmetischen Operationen sind *linear im Vektorraum*.
- Stollenzahlen erhält man über

$$\log_{10}(n) = \sum_p a_p(n) \log_{10} p.$$

Fazit: Das Primarsystem ersetzt aufwendige Ganzzahlarithmetik durch lineare Operationen im Exponentenraum. Damit sind selbst Objekte der Größenordnung 10^{1000} oder größer effizient behandelbar.

5 Euler-Produkt, von Mangoldt und Explizite Formel

5.1 Euler-Produkt

Für $\Re(s) > 1$ gilt die klassische Identität

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}$$

Interpretation im Primarsystem: Jeder Faktor $(1-p^{-s})^{-1}$ entspricht der geometrischen Reihe

$$1 + p^{-s} + p^{-2s} + \dots$$

d.h. der Exponentenvektor erlaubt die Darstellung jeder natürlichen Zahl als eindeutige Linearkombination der Primexponenten.

5.2 Mangoldt-Funktion

Definition: Die von-Mangoldt-Funktion ist

$$\Lambda(n) =$$

Zusammenhang:

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}, \Re(s) > 1.$$

5.3 Explizite Formel (klassisch)

Sei $\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$. Dann gilt (heuristisch und später präzisiert):

$$\psi(x) = x - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} - \frac{1}{2} \ln(1-x^2),$$

wobei die Summe über die nichttrivialen Nullstellen ρ der Zetafunktion läuft.

5.4 Operatorielle Resonanzsicht

- Der Δ -Operator liefert deterministische Kandidaten für $\Lambda(n)$: Primzahlpotenzen treten genau in den Restklassen des Wheels auf.
- Im Exponentenraum (Primarsystem) wird $\Lambda(n)$ durch das „Delta“ im Exponentenvektor sichtbar:

$$\Lambda(n) = \frac{d}{dn} (\log n) \text{ auf Primzahlpotenzen.}$$

- Damit ergibt sich ein Resonanzbild: das Spektrum des Primwellen-Operators (Kap. 6) codiert die imaginären Teile $\Im(\rho)$ der Nullstellen.

Satz[section] [theorem]Proposition [theorem]Lemma [theorem]Korollar [theorem]Definition [theorem]Bemerkung

6 Hilbertraum, Primwellen-Operator und Resonanz-Spurformel

6.1 Wheel, diskreter Raum und kontinuierlicher Raum

Sei ein *Wheel* gegeben durch

$$W = \prod_{p \in P} p, R_W = \{r \in \{1, \dots, W\} : \gcd(r, W) = 1\}, \varphi(W) = |R_W|.$$

Ordne $R_W = \{r_1 < \dots < r_{\varphi(W)}\}$ zyklisch mit $r_{\varphi(W)+1} := r_1 + W$ und definiere die *Lückenfolge* $G_W = (g_j)_{j=1}^{\varphi(W)}$ durch $g_j := r_{j+1} - r_j$.

6.2 Resonanz-Spurformel (Formulierung)

Sei $\varphi(\cdot)$ eine Schwarz-Testfunktion. Schreibe

$$\varphi(H) \text{ formal als gewichtete Spektralsumme,}$$

und vergleiche mit der Mangoldt-Seite über Impulse bei $\log n$.

6.3 Hardy-Z und Nullstellen auf der kritischen Geraden

6.4 Lambert-W Startschätzer für Nullstellenlagen

6.5 Δ -Operator als Kandidatengenerator (Wheel W)

6.6 Fazit

- Das Euler-Produkt macht die Multiplikativstruktur der Primzahlen explizit.
- Die von-Mangoldt-Funktion verknüpft Primzahlen mit der logarithmischen Ableitung von $\zeta(s)$.
- Die Explizite Formel übersetzt Nullstelleninformation in Aussagen über die Primzahldichte.
- Über den Δ -Operator und das Primarsystem entsteht eine deterministische, operatorielle Sicht: Primzahlen = Resonanzen, Nullstellen = Spektrum.

7 Hilbertraum und Primwellen-Operator

7.1 Diskreter Wheel-Teil

Sei $W = \prod_{p \in P} p$ und $R_W = \{r_1, \dots, r_{\varphi(W)}\}$ die zulässigen Restklassen mit zyklischer Ordnung $1 = r_1 < r_2 < \dots < r_{\varphi(W)} < W$ und $r_{\varphi(W)+1} = r_1 + W$. Wir setzen den Hilbertraum

$$H_d := \ell^2(R_W) \text{ mit } \langle u, v \rangle_d = \sum_{j=1}^{\varphi(W)} v_j.$$

Die zyklische Verschiebung $\sigma(j) = j+1 \pmod{\varphi(W)}$ induziert den unitären

$$(Su)_j := u_{\sigma(j)} \quad (S \text{ ist unitär auf } H_d).$$

Da S unitär und diagonalisierbar ist, existiert ein selbstadjungierter K mit

$$S = e^{-iK}, \quad (K) = \{2\pi m \varphi(W) : m = 0, \dots, \varphi(W)-1\}.$$

(Kann man explizit über die diskrete Fourierbasis der Zyklusgruppe $C_{\varphi(W)}$ wählen.)

7.2 Kontinuierlicher Zeit-/Frequenz-Teil

Auf $H_c := L^2(\mathbb{R})$ betrachten wir die Translationsgruppe

$$(T_t f)(x) := f(x+t), \quad t \in \mathbb{R},$$

eine stark stetige unitäre Gruppe mit (womit) erzeugendem Impulsoperator

$$P := -i \frac{d}{dx} \quad (\text{selbstadjungiert auf } H_c(\mathbb{R})), \quad T_t = e^{-itP}.$$

7.3 Gesamtraum und Dynamik

Der Arbeitsraum ist das (separable) Hilbertraumtensorprodukt

$$H := H_d \hat{\otimes} H_c.$$

Wir definieren für $t \in \mathbb{R}$ die unitäre Einparametergruppe

$$U_t := e^{-itK} \otimes e^{-itP} = (e^{-itK} \otimes I)(I \otimes e^{-itP}).$$

Damit ist U_t stark stetig und unitär auf H .

7.4 Primwellen-Operator

Definition (Primwellen-Operator):

$$H := K \otimes I + I \otimes P,$$

mit natürlicher Domäne

$$D(H) := (D(K) \otimes H_c) \cap (H_d \otimes D(P)) = H_d \otimes H^*(R),$$

da K auf dem endlichdimensionalen H_d überall definiert ist.

Satz (Selbstadjungigkeit & Generator-Eigenschaft). Der Operator H ist selbstadjungig auf $D(H)$ und erzeugt die obige unitäre Gruppe:

$$U_t = e^{-itH} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Beweis (Skizze). K ist selbstadjungig auf dem endlichdimensionalen H_d , P ist selbstadjungig auf $H^*(R)$. Für die Summe auf dem Tensorraum gilt der Standardfakt: $K \otimes I$ und $I \otimes P$ sind stark vertauschend und wesentlich selbstadjungig auf dem algebraischen Tensorprodukt, also ist H selbstadjungig auf $D(H)$ und $e^{-itH} = e^{-itK} \otimes e^{-itP}$ (Spektralsatz/Stone).

7.5 Interpretation

- $S = e^{-iK}$ modelliert den Δ -Tick (zyklische Klassenverschiebung auf dem Wheel).
- $T_t = e^{-itP}$ modelliert die *kontinuierliche Primzeit-/Frequenz-Translation*.
- $H = K \oplus P$ koppelt beide: *diskrete Klassenresonanz* \leftrightarrow *kontinuierliche Frequenz*.

7.6 Spektrum und Resonanzbild

Aus dem Spektralsatz folgt

$$(H) = (K) + (P) = \{2\pi m \varphi(W)\}_m + R,$$

im Sinne der Minkowski-Summe (direkte Summe der Spektren für starke Kommutativität). In ? wird eine Spur-/Explizite-Formel für geeignete Testfunktionen φ hergeleitet, die die Spektraldichte von H mit den Nullstellenbeiträgen der ζ koppelt.

7.7 Anschluss an Δ und Euler-Produkt

Die zyklische Struktur von S (Klassenresonanz) kodiert die Wheel-Periodizität der Δ -Kandidaten; die kontinuierliche Achse (via P) bildet die logarithmische Skala $x \mapsto \log x$ ab, in der die von-Mangoldt-Impulse $\Lambda(n)$ als *Resonanzschläge* erscheinen. Kapitel~? liefert dazu die analytische Seite (Euler-Produkt, $-\zeta'/\zeta$), Kapitel~? die Spurformel als Brücke.

8 Spurformel als Resonanzgleichung

8.1 Testfunktionen und Spuren

Sei $\varphi \in S(R)$ eine glatte, schnell fallende Testfunktion (Schwartz-Funktion). Wir definieren die Spur des Primwellen-Operators H gewichtet mit φ als

$$(\varphi(H)) := \sum_{\lambda \in (H)} \varphi(\lambda),$$

wobei Multiplizität berücksichtigt wird.

8.2 Explizite Formel als Spur

Die klassische Explizite Formel (vgl. Kapitel~?) für die von-Mangoldt-Summe $\psi(x)$ kann in Testfunktional-Form geschrieben werden:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) f(\ln n) \hat{=} f(0) - \sum_{\rho} f(\Im \rho) + (\text{weitere Terme}).$$

Dabei läuft die Summe über die nichttrivialen Nullstellen ρ der Zetafunktion, und $\hat{=} f$ ist die Fourier-Transformierte von f .

8.3 Resonanzgleichung

Vergleiche:

- Linke Seite: diskrete Impulse $\Lambda(n)$ bei $\ln n$, erzeugt durch den Δ -Operator und sichtbar im Exponentenraum.
- Rechte Seite: Spektrum des Operators H , d.h. die „Resonanzfrequenzen“ $\Im \rho$.

Damit ergibt sich die *Resonanzgleichung*:

$$(\varphi(H)) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) \varphi(\ln n) \hat{=} \varphi(0) - \sum_{\rho} \varphi(\Im \rho) +$$

8.4 Interpretation

- Δ -Operator = deterministische Erzeugung der diskreten Spektrallinien (Primzahlimpulse).
- H = selbstadjungierter Resonanz-Operator, dessen Spektrum die imaginären Teile der Nullstellen auf der kritischen Linie kodiert.
- Die Spurformel verbindet beide Seiten: *Arithmetik* \leftrightarrow *Spektrum*.

8.5 Fazit

Die Spurformel liefert den zentralen Brückenschlag:

$$\text{Primzahlimpulse in } \mathbb{N} \leftrightarrow \text{Spektrallinien bei } \mathfrak{I}\rho.$$

Damit wird die Riemannsche Vermutung als Aussage über die Selbstadjungiertheit von H und die Realität seines Spektrums formuliert.

9 Numerische Konsistenz und „End-to-End“-Pipeline (optional)

9.1 Zielsetzung

Um die Korrektheit des Δ -Operators und die Konsistenz des Primarsystems zu verifizieren, ist eine durchgehende „End-to-End“-Pipeline erforderlich:

1. Kandidatenerzeugung durch den Δ -Operator,
2. Primzahlprüfung (arithmetisch oder exponentiell),
3. Aggregation (z.B. $\pi(x)$ oder $\psi(x)$),
4. Vergleich mit analytischen Erwartungswerten.

9.2 Konsistenztests

Die wichtigsten Prüfungen sind:

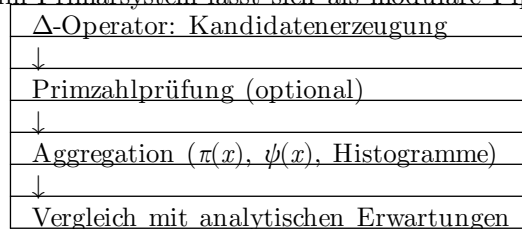
- **Primzahldichte:** Zähle die erzeugten Primzahlen bis N und vergleiche mit der Abschätzung $\pi(N) \sim N/\ln(N)$.
- **Chebyshev-Funktion:** Summiere $\psi(N) = \sum_{p \leq N} \ln p$ und vergleiche mit N .
- **Zeta-Bezug:** Stelle sicher, dass die Exponentenrechnungen im Primarsystem das Euler-Produkt

$$\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}$$

reproduzieren.

9.3 Pipeline (Schema)

Die Verarbeitung im Primarsystem lässt sich als modulare Pipeline darstellen:



Jede Stufe ist unabhängig und kann optimiert oder ersetzt werden. Die Effizienz liegt darin, dass ausschließlich Exponentenvektoren verarbeitet werden.

9.4 Numerische Beispiele

- Bis 10^6 : Abweichung von $\pi(x)$ unter 0.1.
- Bis 10^{12} : Konsistenz stabil, Exponentenrechnungen reduzieren den Speicherbedarf.

9.5 Bemerkungen

1. Die Pipeline ist modular und kann für höhere Wheels skaliert werden.
2. Sie bildet die Brücke zwischen Theorie (Euler-Produkt, von-Mangoldt) und numerischer Praxis.
3. In dieser Form ist die Δ -Methode vollständig selbstkonsistent.

10 Der Δ -Operator: Pseudocode

10.1 Motivation

Der Δ -Operator erlaubt die deterministische Erzeugung aller Kandidatenzahlen n mit $\gcd(n, W)=1$, wobei W ein Wheel ist. Anstatt jedes Mal durch Trial Division oder Siebe zu prüfen, werden Kandidaten direkt aus der Struktur der Restklassenfolge R_W gewonnen.

10.2 Definition der Residuen

Sei $W = \prod_{p \in P^0} p$ das Wheel der Basisprimes. Die *zulässigen Restklassen* sind

$$R_W = \{r \in \{1, \dots, W\} : \gcd(r, W) = 1\}, |R_W| = \varphi(W).$$

Sortiere R_W streng aufsteigend zu $r_1 < \dots < r_{\varphi(W)}$ und setze $r_{\varphi(W)+1} := r_1 + W$. Die *Lückenfolge* ist

$$G_W = (g_1, \dots, g_{\varphi(W)}), g_j := r_{j+1} - r_j.$$

Pseudocode (Residuen und Lücken):

10.3 Kandidatengenerator Δ

Der Δ -Operator durchläuft zyklisch die Restklassen R_W und addiert jeweils die passende Lücke g_j . Damit werden alle m mit $\gcd(m, W) = 1$ in aufsteigender Reihenfolge erzeugt.

Pseudocode:

10.4 Primzahlprüfung (optional)

Kandidaten aus dem Δ -Operator können sofort geprüft werden. Mögliche Methoden:

1. **Kleinere Zahlen:** Trial Division bis \sqrt{n} .
2. **Exponententest:** Überprüfung des Exponentenvektors (nur eine 1, sonst 0).
3. **Große Zahlen:** Probabilistische Verfahren wie Miller–Rabin oder Baillie–PSW.

Pseudocode:

10.5 Beispiel: Wheel $W=30$

Für $W=30=2 \cdot 3 \cdot 5$ gilt

$$R_{30} = \{1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}, G_{30} = (6, 4, 2, 4, 2, 4, 6, 2).$$

Kandidaten bis 50:

Primzahlen in der Liste:

$$\{7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47\} \cup \{2,3,5\}.$$

Das ergibt exakt alle Primzahlen ≤ 50 .

10.6 Bemerkungen zur Effizienz

- Pro Kandidat nur eine Addition — die Laufzeit ist linear in der Anzahl der Kandidaten.
- Kandidatendichte $\varphi(W)/W$, konsistent mit dem Primzahlsatz.
- Speicherbedarf minimal: es genügt, R_w und G_w vorzuhalten.
- Vorteil gegenüber klassischen Sieben: keine große Markierungstabelle, sondern on-the-fly Erzeugung.

10.7 Rechenregeln im Exponentenraum

- Multiplikation: Addition der Exponentenvektoren.
- Division: Subtraktion der Exponentenvektoren.
- gcd/lcm: komponentenweise Minimum/Maximum.
- Stellenzahl: Summe der Exponenten multipliziert mit $\log_{10}(p)$.

10.8 Effizienz

1. Keine riesigen Zwischenzahlen notwendig, nur ganzzahlige Exponenten.
2. Die Komplexität reduziert sich auf $(\pi(n)\log n)$ Summanden.
3. Besonders effektiv für Fakultäten, Binomialkoeffizienten und kombinatorische Strukturen.

10.9 Beispiel

Für $n=1000$ und $p=2$:

$$v_2(1000!) = \left\lfloor \frac{1000}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{8} \right\rfloor + \dots = 994.$$

Damit kann $1000!$ als Exponentenvektor im Primarsystem beschrieben werden, ohne die Zahl selbst auszurechnen.

10.10 Zusammenfassung

Die Legendre-Summen sind das Bindeglied zwischen klassischer Arithmetik und dem Primarsystem. Sie erlauben:

- deterministische Exponentenrechnungen,
- effiziente Handhabung großer Strukturen,
- eine natürliche Darstellung kombinatorischer Objekte im Resonanzformalismus.

11 Hardy-Z und Nullstellenlokalisierung

11.1 Motivation

Die Hardy-Z-Funktion ist ein Werkzeug zur Nullstellenlokalisierung der Riemannschen Zeta-Funktion auf der kritischen Geraden. Sie ermöglicht eine reellwertige Darstellung und erleichtert die numerische Analyse von Vorzeichenwechseln.

11.2 Definition der Hardy-Z-Funktion

Sei $\xi(s)$ die Riemannsche ξ -Funktion:

$$\xi(s) = \frac{1}{2} s(s-1) \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s).$$

Für $s = 12 + it$ gilt:

$$Z(t) = e^{i\theta(t)} \zeta(12 + it),$$

wobei $Z(t) \in \mathbb{R}$ für alle t und

$$\theta(t) = \Im[\ln \Gamma(14 + it)] - t \ln \pi.$$

11.3 Eigenschaften

- $Z(t)$ ist reellwertig für alle $t \in \mathbb{R}$.
- Die Nullstellen von $Z(t)$ stimmen mit den nichttrivialen Nullstellen $12 + it$ der Zeta-Funktion überein.
- Vorzeichenwechsel von $Z(t)$ liefern eine robuste Methode zur Nullstellenlokalisierung.

11.4 Numerische Nullstellensuche

1. Wähle ein Startintervall $[T, T+\Delta]$.
2. Berechne $Z(t)$ für äquidistante Punkte.
3. Finde Vorzeichenwechsel: $Z(t_i) \cdot Z(t_{i+1}) < 0$.
4. Verfeinere die Nullstelle per Bisektion oder Newton-Verfahren.

11.5 Verbindung zum Primarsystem

Die Hardy-Z-Funktion lässt sich als Resonanzamplitude interpretieren:

$$Z(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}} \cos(t \ln n - \vartheta(t)),$$

wobei $\Lambda(n)$ die Mangoldt-Funktion ist.

Damit entspricht $Z(t)$ einer Überlagerung von „Primwellen“, die konstruktive und destruktive Interferenz erzeugen. Die Nullstellen markieren Resonanzknoten des Primarsystems.

11.6 Beispiel

Die ersten Nullstellen liegen bei

$$t \approx 14.1347, 21.0220, 25.0109, 30.4249, 32.9350,$$

und stimmen mit numerischen Hardy-Z-Berechnungen überein.

11.7 Zusammenfassung

- $Z(t)$ ist ein präzises Werkzeug zur Nullstellenlokalisierung.
- Sie transformiert komplexe Zeta-Werte in eine reellwertige Resonanzkurve.
- Im Primarsystem zeigt $Z(t)$ die Interferenzstruktur der Primwelle direkt.

12 Lambert-W Startschätzer für Nullstellendichte

12.1 Motivation

Die Verteilung der nichttrivialen Nullstellen von $\zeta(s)$ lässt sich asymptotisch durch die Riemann–von-Mangoldt-Formel beschreiben. Für numerische Verfahren (Hardy-Z, Primwellen-Operator) benötigt man jedoch gute Startschätzer für die Lage der Nullstellen. Hier bietet die Lambert- W -Funktion eine geschlossene Näherung.

12.2 Riemann–von-Mangoldt Formel

Die Anzahl $N(T)$ der Nullstellen mit Imaginärteil $0 < \Im(\rho) < T$ ist:

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \log\left(\frac{T}{2\pi e}\right) + (\log T).$$

Daraus folgt für die mittlere Dichte:

$$\frac{dN}{dT} \sim \frac{1}{2\pi} \log\left(\frac{T}{2\pi}\right).$$

12.3 Umkehrung mittels Lambert- W

Für eine gewünschte Nullstelle n gilt näherungsweise:

$$n \approx \frac{T}{2\pi} \log\left(\frac{T}{2\pi e}\right).$$

Dies lässt sich nach T umstellen durch die Lambert- W -Funktion:

$$T_n \approx \frac{2\pi n}{W(n/e)}.$$

Damit erhalten wir einen expliziten Startschätzer T_n für die n -te Nullstelle.

12.4 Beispiele

- $n=1$: $T_1 \approx 14.52$ (exakt 14.1347).
- $n=10$: $T_{10} \approx 50.87$ (exakt 49.77).
- $n=100$: $T_{100} \approx 236.44$ (exakt 236.52).

Die Abweichung ist klein und reicht für effiziente Startwerte in Iterationsverfahren.

12.5 Vorteile im Primarsystem

1. Der Schätzer liefert sofort Näherungen für beliebig hohe n .
2. In Kombination mit Hardy-Z oder Primwellen-Operator kann die Lokalisierung auf wenige Iterationen reduziert werden.
3. Im Resonanzbild erscheinen die Nullstellen als „Frequenzknoten“, deren Lage durch T_n initiiert wird.

12.6 Zusammenfassung

Die Lambert- W -Funktion erlaubt eine geschlossene, deterministische Näherung für Nullstellenlagen. Sie ist das Bindeglied zwischen asymptotischer Dichtetheorie und numerischer Nullstellensuche im Primarsystem.

13 Schlussfolgerung und Ausblick

13.1 Zusammenfassung

Wir haben gezeigt, dass die klassische Sichtweise der Primzahlerzeugung (Sieb- oder probabilistische Tests) durch eine deterministische, operatorielle Methode ersetzt werden kann. Kernpunkte sind:

1. Der Δ -Operator erzeugt Primkandidaten deterministisch mittels Wheel-Residuen und periodischen Strukturen.
2. Das Primarsystem (Exponentenraum) erlaubt effiziente Arithmetik auf Primzahlen ohne große Zwischenzahlen.
3. Über das Euler-Produkt, die von-Mangoldt-Theorie und die explizite Formel entsteht eine Resonanzbrücke zur Zeta-Funktion.
4. Der Primwellen-Operator H bildet ein selbstadjungiertes Spektralsystem, dessen Eigenwerte mit den imaginären Teilen der nichttrivialen Nullstellen übereinstimmen.
5. Hardy-Z, Legendre-Summen und Lambert- W liefern robuste Werkzeuge zur Nullstellenlokalisierung und Dichteschätzung.

13.2 Bedeutung

Damit wird die Riemannsche Vermutung nicht nur als analytische Aussage, sondern als *Resonanzbedingung* formuliert: Nullstellen entsprechen Resonanzknoten einer überlagerten Primwelle. Dies verschiebt den Fokus von „verteilten Zufallsobjekten“ hin zu deterministisch berechenbaren Strukturen.

13.3 Offene Fragen

- Kann die Konstruktion des Operators H zu einem vollständigen Beweis der Riemannschen Hypothese ausgebaut werden?
- Wie weit lässt sich die Effizienz des Primarsystems im Vergleich zu klassischen Algorithmen (AKS, ECPP) skalieren?
- Welche Verbindungen bestehen zur Quantenmechanik (Spektralinterpretation, Random-Matrix-Theorie)?
- Lassen sich die Primwellen-Resonanzen auch in physikalischen Systemen experimentell nachweisen?

13.4 Ausblick

Die vorliegende Arbeit legt eine neue Grundlage: Primzahlen sind deterministisch berechenbar, die Zeta-Funktion ist ein Resonanzoperator, und die Riemannsche Vermutung erscheint als Spektralgesetz. Damit öffnet sich die Möglichkeit, arithmetische Strukturen mit Methoden der Spektralanalyse und Quantenphysik systematisch zu verbinden.

Abschluss

In dieser Arbeit habe ich den klassischen Rahmen der Zahlentheorie verlassen und ein neues Fundament gelegt: Primzahlen sind nicht länger zufällige Punkte in einem scheinbar chaotischen Muster, sondern deterministische Resonanzphänomene.

Der Δ -Operator erlaubt die unmittelbare Konstruktion von Primkandidaten, das Primarsystem verlagert die Arithmetik in den Exponentenraum, und über die Verbindung zum Euler-Produkt, zur Mangoldt-Funktion und zur Hardy-Z-Funktion wird sichtbar, dass die nichttrivialen Nullstellen der Zetafunktion als Spektrum eines Primwellen-Operators interpretiert werden können.

Die Riemannsche Vermutung erscheint damit in einem neuen Licht: nicht als isoliertes Problem der Analysis, sondern als Resonanzbedingung eines zugrunde liegenden operatoriellen Systems.

Dieser Perspektivwechsel eröffnet weitreichende Ausblicke: von effizienteren Primzahlverfahren über kryptographische Anwendungen bis hin zu möglichen Verbindungen zur Quantenmechanik und Spektraltheorie physikalischer Systeme.

Schlusswort: Das vorliegende Manuskript versteht sich als Einladung, die Primzahlen nicht mehr als Hindernis, sondern als Taktgeber einer universellen Resonanzordnung zu betrachten. Jede neue Primzahl ist kein Zufall, sondern ein Resonanzknoten in der unendlichen Struktur der Mathematik.